

**ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ
ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ,
ЗАПОЛНЕННОМ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ¹**

Аннотация.

Актуальность и цели. Предложен аналитический метод исследования задачи дифракции монохроматических поляризованных электромагнитных ТЕ-волн на диэлектрическом слое, диэлектрическая проницаемость которого нелинейно зависит от квадрата модуля электрического поля. Интерес к подобным задачам обусловлен прежде всего практическими приложениями нелинейных эффектов в микроэлектронике и фотонике.

Материалы и методы. Основным методом исследования является метод интегральных дисперсионных уравнений.

Результаты. В работе получены уравнения, связывающие амплитуду падающей волны с коэффициентами отражения и прохождения для нелинейности типа Керра. Проведено сравнение с решением соответствующей линейной задачи.

Выводы. В рассматриваемой задаче получение явных выражений для искоемых коэффициентов возможно лишь для нелинейностей третьего (нелинейность Керра) и пятого порядков. Но даже в этих случаях явные решения нелинейных дифференциальных уравнений достаточно сложны, чтобы использовать их для явного выражения указанных коэффициентов. В случае нелинейностей более высоких порядков явные решения найти не удастся. Однако предложенный в статье подход позволит получить уравнения, связывающие искомые коэффициенты и в этих более сложных случаях.

Ключевые слова: задача дифракции, диэлектрический слой, нелинейность Керра, уравнение Максвелла.

D. V. Valovik, A. E. Demchenko

**ON ONE APPROACH TO THE PROBLEM
OF POLARIZED ELECTROMAGNETIC WAVES
DIFFRACTION ON A DIELECTRIC LAYER
FILLED WITH A NONLINEAR MEDIUM**

Abstract.

Background. An analytical approach to the problem of diffraction of monochromatic polarized electromagnetic TE waves on a dielectric layer filled with a nonlinear medium is suggested. The nonlinear medium's permittivity depends on the electric field's squared module. Such kind of problems attracts attention due to the importance of nonlinear effects in microelectronics and photonics.

Materials and methods. The main theoretical tool to study the problem is the integral dispersion equation method.

¹ Работа поддержана Грантом Президента РФ (грант № МК-4684.2016.1).

Results. The approach used allows one to derive equations binding the amplitude of the incident field with the reflection and transmission coefficients for the Kerr medium. The article shows a comparison between the nonlinear problem and the corresponding linear problem.

Conclusions. Explicit formulas for the sought-for coefficients can be found only in the cases of cubic (Kerr nonlinearity) and quintic nonlinearities. However, explicit solutions to the nonlinear differential equations are complicated for both cases. This makes it practically useless to use the explicit solutions for determination of the sought-for coefficients. The use of explicit solutions is impossible due to higher nonlinearities. However, the approach, suggested by the authors, works well for cubic, quintic as well as for much more complicated cases.

Key words: problem of diffraction, dielectric layer, Kerr nonlinearity, Maxwell's equation.

Введение

Задачи дифракции монохроматических поляризованных электромагнитных волн на плоских диэлектрических слоях, заполненных нелинейной средой (см. [1–4] и библиографию там), исследовались не так активно, как соответствующие задачи о распространении волн. При этом теория таких задач дифракции интересна и содержательна. Существенным препятствием здесь, как и в случае аналогичных задач о распространении волн, служит то, что явные решения нелинейной задачи дифракции (значения коэффициентов отражения и прохождения) можно искать лишь в самых простейших случаях [4]. В остальных случаях исследуемые нелинейные дифференциальные уравнения не удастся проинтегрировать в явном виде, а значит, нет возможности выразить искомые коэффициенты через явные решения уравнений (если же в отдельных случаях явные решения можно найти, то они являются весьма сложными функциями, и по этой причине эффективно работать с ними не удастся). Указанная сложность является одной из причин для поиска подходящего метода для решения рассматриваемого класса задач. Одним из таких методов служит метод, развитый в [5].

1. Постановка задачи

Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ расположен плоский слой

$$\Sigma := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \quad (h > 0).$$

Полупространства $x < 0$ и $x > h$ заполнены однородными и изотропными средами без потерь с постоянными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_1 \varepsilon_0 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_3 \varepsilon_0 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Слой Σ заполнен однородной и изотропной средой без потерь с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от электрического поля. Диэлектрическая проницаемость ε в слое выражается законом Керра:

$$\varepsilon = \left(\tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\alpha} |\mathbf{E}|^2 \right) \varepsilon_0, \quad (1)$$

где $\tilde{\varepsilon}_2$ – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости; $\tilde{\alpha} > 0$ – коэффициент нелинейности. Во всем пространстве $\mu = \mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Мы предполагаем, что выполняются неравенства $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Рассмотрим монохроматическую ТЕ-волну $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, которая падает на слой Σ из полупространства $x > h$. Здесь ω – (известная) круговая частота,

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T e^{i\gamma z}, \quad (2)$$

а γ – известная вещественная постоянная, компоненты E_y , H_x , H_z зависят только от координаты x . Поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ называются комплексными амплитудами.

Как известно, волна частично отражается, а частично преломляется слоем. Падающая волна на границе $x = h$ характеризуется коэффициентом E_i , отраженная волна – коэффициентом E_r ; преломленная волна на границе $x = 0$ характеризуется коэффициентом E_t .

Задача дифракции заключается в том, чтобы по известному коэффициенту E_i найти коэффициенты E_t и E_r . При этом комплексные амплитуды (2) удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \end{cases} \quad (3)$$

стандартным условиям сопряжения на границах раздела сред; отраженная волна удовлетворяет условию излучения на бесконечности.

В полупространствах $x < 0$ и $x > h$ уравнения (3) линейные, их решения для полей (2) легко находятся и имеют вид (при нахождении решения для $x < 0$ было использовано условие излучения):

$$E_y(x) = \begin{cases} E_t e^{k_1 x}, & x < 0, \\ E_i e^{k_3(x-h)} + E_r e^{-k_3(x-h)}, & x > h, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1 > 0, \quad k_3^2 := \gamma^2 - \varepsilon_3 > 0, \quad k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_1 = k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1, \quad \varepsilon_3 = k_0^2 \tilde{\varepsilon}_3.$$

Используя обозначение $E := E_y$, внутри слоя Σ из уравнений (3) получаем

$$E'' = -\left(k_2^2 + \tilde{\alpha} k_0^2 E^2\right) E, \quad (5)$$

где $k_2^2 := \varepsilon_2 - \gamma^2$ (k_2^2 не обязательно положительно); $\varepsilon_2 = k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2$; $\alpha = k_0^2 \tilde{\alpha}$.

Используя решения (4) и условия сопряжения, получаем граничные условия для уравнения (5):

$$E'(0) - k_1 E(0) = 0, \quad E(h) = E_i + E_r, \quad E'(h) = k_3 (E_i - E_r), \quad (6)$$

где $E(0) = E_t$.

2. Линейный случай

Пусть $\gamma^2 < \varepsilon_2$, тогда из (5) внутри слоя при $\alpha = 0$ получаем

$$E(x) = C_1 \sin k_2 x + C_2 \cos k_2 x. \quad (7)$$

Вычисляя $E(x)$ в точке $x = 0$ и используя первое условие (6), получаем

$$C_2 = E_t, \quad C_1 = \frac{k_1}{k_2} E_t.$$

Теперь используя остальные условия (6) и решение (7), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (k_1 \sin k_2 h + k_2 \cos k_2 h) E_t - k_2 E_r = k_2 E_i, \\ (k_1 \cos k_2 h - k_2 \sin k_2 h) E_t + k_3 E_r = k_3 E_i. \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, что значение γ должно быть выбрано так, чтобы определитель этой системы не обращался в нуль. Указанный определитель есть

$$\Delta = k_2(k_1 + k_3) \cos k_2 h - (k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h.$$

Замечание 1. Уравнение $\Delta = 0$ (относительно γ) есть ни что иное, как дисперсионное уравнение для определения постоянных распространения собственных ТЕ-волн вида (2) волновода Σ [6, 7].

Решая систему (8), находим

$$E_t = \frac{2k_2 k_3}{k_2(k_1 + k_3) \cos k_2 h - (k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h} E_i, \quad (9)$$

$$E_r = \frac{-k_2(k_1 - k_3) \cos k_2 h + (k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h}{k_2(k_1 + k_3) \cos k_2 h - (k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h} E_i. \quad (10)$$

Используя первый интеграл уравнения (5) и краевые условия (6), получаем следующее соотношение:

$$k_3^2 (E_i - E_r)^2 + k_2^2 (E_i + E_r)^2 = (k_1^2 + k_2^2) E_t^2. \quad (11)$$

В случае $\gamma^2 > \varepsilon_2$, т.е. $k_2^2 < 0$, решение уравнения (5) в слое примет вид

$$E(x) = \tilde{A} \sin i\tilde{k}_2 x + B \cos i\tilde{k}_2 x = A \operatorname{sh} \tilde{k}_2 x + B \operatorname{ch} \tilde{k}_2 x, \quad (12)$$

где

$$\tilde{k}_2^2 := -k_2^2, \quad A = \frac{k_1}{\tilde{k}_2} E_t, \quad B = E_t.$$

Вычисляя $E(x)$ в точке $x = h$ и используя условия (6), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (k_1 \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h + \tilde{k}_2 \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h) E_t - \tilde{k}_2 E_r = \tilde{k}_2 E_i, \\ (k_1 \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h + \tilde{k}_2 \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h) E_t + k_3 E_r = k_3 E_i. \end{cases} \quad (13)$$

Решая систему (12), получаем

$$E_t = \frac{2\tilde{k}_2 k_3}{\tilde{k}_2(k_1 + k_3) \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h + (\tilde{k}_2^2 + k_1 k_3) \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h} E_i, \quad (14)$$

$$E_r = \frac{\tilde{k}_2(k_3 - k_1) \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h + (k_1 k_3 - \tilde{k}_2^2) \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h}{\tilde{k}_2(k_1 + k_3) \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h + (\tilde{k}_2^2 + k_1 k_3) \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h} E_i. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае соотношение (11) изменится очевидным образом.

3. Нелинейный случай

Первый интеграл уравнения (5) имеет вид

$$(E'(x))^2 + k_2^2 E^2(x) + \frac{\alpha}{2} E^4(x) = C, \quad (16)$$

где C – постоянная интегрирования.

Используя (6) в точке $x = 0$, получаем

$$C = (k_2^2 - k_1^2) E_t^2 + \frac{1}{2} \alpha E_t^4 = (\epsilon_2 - \epsilon_1) E_t^2 + \frac{1}{2} \alpha E_t^4, \quad (17)$$

здесь C не зависит от γ и $C > 0$, если $\alpha \geq 0$.

Используя (6) в точке $x = h$ и формулу (17), получаем из (16) соотношение, аналогичное (11), но для нелинейного случая:

$$\begin{aligned} \Psi(E_r, E_t) &\equiv k_3^2 (E_i - E_r)^2 + k_2^2 (E_i + E_r)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha (E_i + E_r)^4 - (k_2^2 - k_1^2) E_t^2 - \frac{1}{2} \alpha E_t^4 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем новые переменные:

$$\tau(x) = E^2(x), \quad \eta(x) = \frac{E'(x)}{E(x)}. \quad (19)$$

Уравнение (5) можно переписать как систему в нормальной форме:

$$\begin{cases} \tau' = 2\tau\eta, \\ \eta' = -(k_2^2 + \alpha\tau + \eta^2). \end{cases} \quad (20)$$

Первый интеграл системы (20), который можно найти непосредственно из (20) или из (16), имеет вид

$$\alpha\tau^2 + 2(\eta^2 + k_2^2)\tau = 2C. \quad (21)$$

Решая (21) относительно τ , учитывая, что $\tau \geq 0$ и подставляя результат в правую часть второго уравнения (20), получаем

$$\eta' = -w, \quad (22)$$

где $w = \sqrt{(k_2^2 + \eta^2)^2 + 2\alpha C} > 0$. Используя (6), находим

$$\eta(0) = k_1, \quad \eta(h) = k_3 \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r}. \quad (23)$$

Из формулы (19) видно, что η непрерывна тогда и только тогда, когда $E(x)$ не обращается в 0. В общем случае $E(x)$ имеет нули $x_1, \dots, x_n \in (0, h)$. Таким образом, $\eta(x)$ имеет n точек разрыва $x_1, \dots, x_n \in (0, h)$. Если $n = 0$, то $E(x)$ не обращается в 0 ни в одной точке $x \in (0, h)$ и, значит, $\eta(x)$ непрерывна при $x \in (0, h)$. Ясно, что $E'(x_i) \neq 0$ для любых $i = \overline{1, n}$.

Используя формулы (19) и (22), получаем

$$\eta(x_i - 0) = -\infty, \quad \eta(x_i + 0) = +\infty, \quad i = \overline{1, n}. \quad (24)$$

Решение уравнения (22) будем искать на интервалах $[0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, h]$:

$$\begin{aligned} \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w} &= x + c_0, \quad 0 \leq x < x_1, \\ -\int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} \frac{d\eta}{w} &= x + c_i, \quad x_i < x < x_{i+1}, \\ -\int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} \frac{d\eta}{w} &= x + c_n, \quad x_n < x \leq h, \end{aligned} \quad (25)$$

где $i = \overline{1, n-1}$. Подставляя $x = 0$, $x = x_{i+1} - 0$, $x = h$ в (25) (в первую, вторую и третью формулы соответственно), найдем постоянные $c_0, c_1, \dots, c_n$:

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w}, \\ c_i &= -\int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} \frac{d\eta}{w} - x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ c_n &= -\int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} \frac{d\eta}{w} - h. \end{aligned} \quad (26)$$

Учитывая (26), перепишем (25) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w} &= x + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w}, \quad 0 \leq x < x_1, \\ -\int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} \frac{d\eta}{w} &= x - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} \frac{d\eta}{w} - x_{i+1}, \quad x_i < x < x_{i+1}, \\ -\int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} \frac{d\eta}{w} &= x - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} \frac{d\eta}{w} - h, \quad x_n < x \leq h, \end{aligned} \quad (27)$$

где $i = \overline{1, n-1}$. Подставляя $x = x_1 - 0$, $x = x_i + 0$, $x = x_n + 0$ в (27) (в первую, вторую и третью формулы соответственно), получим

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w}, \\ 0 &= x_i - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} \frac{d\eta}{w} - x_{i+1}, i = \overline{1, n-1}, \\ 0 &= x_n - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} \frac{d\eta}{w} - h. \end{aligned} \quad (28)$$

Принимая во внимание (23) и используя (24), получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_{-\infty}^{k_1} \frac{d\eta}{w}, \\ x_{i+1} - x_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{w}, i = \overline{1, n-1}, \\ h - x_n &= \int_{k_3}^{+\infty} \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r} \frac{d\eta}{w}. \end{aligned} \quad (29)$$

Просуммировав (29), получим

$$x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_n - x_{n-1} + h - x_n = \Phi(E_r, E_t; n), \quad (30)$$

где

$$\Phi(E_r, E_t; n) \equiv \int_{-\infty}^{k_1} \frac{d\eta}{w} + (n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{w} + \int_{k_3}^{+\infty} \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r} \frac{d\eta}{w}.$$

Из формулы (30) получаем уравнение

$$\Phi(E_r, E_t; n) = h, \quad (31)$$

где $n = 0, 1, \dots$

Из проведенных выше рассуждений получаем следующее

Утверждение 1. Пусть $\alpha > 0$, $h > 0$ и E_i известны. Если пара чисел E_r , E_t является решением задачи (5)–(6), тогда числа E_r и E_t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \Psi(E_r, E_t) = 0, \\ \Phi(E_r, E_t; n) = h \end{cases} \quad (32)$$

для некоторого целого $n \geq 0$.

Можно показать, что всякое решение (E_r, E_t) системы (32) является решением задачи (5)–(6) и, таким образом, доказать теорему об эквивалентности.

Положив в (31) $\alpha = 0$, проинтегрировав и взяв $\tan$, после несложных преобразований получим формулу (10). Обоснованием такого подхода

служит следующее рассуждение. Пусть δ, Δ – фиксированные достаточно малые положительные числа и пусть $\gamma^2 \in [\epsilon_1 + \delta, \epsilon_2 - \Delta]$. В этом случае функция $1/w$ равномерно по γ стремится к предельной функции $1/w_0$, где $w_0 = k_2^2 + \eta^2$, при $\alpha \rightarrow 0$. Этот результат позволяет перейти к пределу под знаком интеграла. Необходимо отметить, что в линейной задаче при $\gamma^2 \geq \epsilon_2$ решение не может существовать при целых $n \geq 2$. Действительно, при $n \geq 2$ величина η будет принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$ и, значит, соответствующий интеграл в (31) будет расходящимся. Таким образом, при $\gamma^2 \geq \epsilon_2$ в линейном пределе уравнение (31) дает либо $\Phi(E_r, E_t; 0) = h$ при условии, что точки $\pm\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_2} \notin \left[k_3 \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r}, k_1 \right]$, либо $\Phi(E_r, E_t; 1) = h$ при условии, что точки $\pm\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_2} \notin (-\infty, k_1] \cup \left[k_3 \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r}, +\infty \right)$. В последних случаях предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ в (31) можно обосновать таким же образом, как и выше.

Заключение

В работе предложен подход к изучению задачи дифракции поляризованных электромагнитных волн на плоском диэлектрическом слое с нелинейной диэлектрической проницаемостью. Искомые в такой задаче являются коэффициенты отражения E_r и прохождения E_t ; амплитуда падающей волны E_i считается известной. Ясно, что явные формулы для E_r и E_t можно получать лишь в самых простых случаях. Действительно, если нелинейность в слое имеет вид $\epsilon = \epsilon_2 + \alpha_1 |\mathbf{E}|^2 + \alpha_2 |\mathbf{E}|^4$, то задачу можно проинтегрировать в эллиптических функциях, что позволяет надеяться на явное выражение искомых коэффициентов. Однако для более сложных нелинейностей получить явные формулы невозможно (для электромагнитных ТМ-волн явные формулы не удастся получить даже для нелинейности вида (1)). Заметим, что более сложные нелинейности активно изучаются в нелинейной оптике, и поэтому изучение аналогичной задачи для более сложных функций нелинейности оправдано.

Указанные выше трудности заставляют искать новые подходы к изучению рассматриваемой задачи. Один из таких подходов, основанный на методе интегральных дисперсионных уравнений [5], предложен в данной статье. Этот подход позволяет получить формулы, связывающие амплитуду падающей волны E_i с коэффициентами отражения E_r и прохождения E_t , в данном случае это формула (31). Несмотря на то, что это неявная формула, она обладает некоторыми достоинствами по сравнению с исходной задачей дифракции (5)–(6). Действительно, задача (5)–(6) есть краевая задача для дифференциального уравнения, а уравнение (31) – трансцендентное уравнение относительно E_r , E_t при условии (18). Кроме того, из вывода уравнения (31) ясно, что уравнение такого типа можно получить и для функций нелинейно-

сти $f \equiv f(E^2)$ из достаточно широкого класса (т.е. даже и в тех случаях, когда заведомо невозможно найти явные решения нелинейного уравнения, аналогичного (5)).

Список литературы

1. **Leung, K. M.** Scattering of transverse-electric electromagnetic waves with a finite nonlinear film / K. M. Leung // *Journal of the Optical Society of America B.* – 1988. – Vol. 5 (2). – P. 571–574.
2. **Leung, K. M.** Exact results for the scattering of electromagnetic waves with a nonlinear film / K. M. Leung // *Physical Review B.* – 1989. – Vol. 39 (6). – P. 3590–3598.
3. **Leung, K. M.** Scattering of transverse-magnetic waves with a nonlinear film: formal field solutions in quadratures / K. M. Leung and R. L. Lin // *Physical Review B.* – 1991. – Vol. 44 (10). – P. 5007–5012.
4. **Schürmann, H. W.** Reflection and transmission of a plane te-wave at a lossless nonlinear dielectric film / H. W. Schürmann, V. S. Serov, and Yu. V. Shestopalov // *Physica D.* – 2001, October. – Vol. 158 (1-4). – P. 197–215.
5. **Valovik, D. V.** Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem / D. V. Valovik // *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* – 2014. – Vol. 20 (12). – P. 52–58. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.04.007.
6. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
7. **Адамс, М.** Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. – М.: Мир, 1984. – 512 с.

References

1. Leung K. M. *Journal of the Optical Society of America B.* 1988, vol. 5 (2), pp. 571–574.
2. Leung K. M. *Physical Review B.* 1989, vol. 39 (6), pp. 3590–3598.
3. Leung K. M. and Lin R. L. *Physical Review B.* 1991, vol. 44 (10), pp. 5007–5012.
4. Schürmann H. W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V. *Physica D.* 2001, October, vol. 158 (1-4), pp. 197–215.
5. Valovik D. V. *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* 2014, vol. 20 (12), pp. 52–58. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.04.007.
6. Vaynshteyn L. A. *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow: Radio i svyaz', 1988, 440 p.
7. Adams M. *Vvedenie v teoriyu opticheskikh volnovodov* [Introduction into the theory of optical waveguides]. Moscow: Mir, 1984, 512 p.

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
профессор, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitriy Viktorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Демченко Анна Евгеньевна
студент, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Demchenko Anna Evgen'evna
Student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

E-mail: dem-94@mail.ru

УДК 517.927, 517.968, 519.6

Валовик, Д. В.

Об одном подходе к задаче дифракции поляризованных электромагнитных волн на диэлектрическом слое, заполненном нелинейной средой / Д. В. Валовик, А. Е. Демченко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 28–37. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-3